УДК 517.912

***Р.М. Тацій**, д-р фіз.-мат. наук, професор, **О.М. Трусевич**, канд. фіз.-мат. наук, доцент*
(Львівський державний університет безпеки життєдіяльності)

ПРЯМИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПЕРШОЇ ЗАГАЛЬНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В ПРЯМОКУТНИКУ

Запропоновано та обґрунтовано прямий метод розв'язування першої загальної крайової задачі для рівняння теплопровідності в прямокутнику. За основу цього методу взято метод редукції, класичний метод Фур'є, метод власних функцій та власних значень. Перевагою цього методу є власне прямий метод розв'язування даної задачі. Розв'язок отримано у вигляді рядів. Задача розв'язана з ненульовими крайовими умовами на всіх чотирьох сторонах прямокутника та може бути поширена на випадки крайових умов другого та третього роду або будь-яких комбінацій таких умов на різних сторонах прямокутника.

Ключові слова: власні значення та власні функції, метод Фур'є, функція Коші, подвійний ряд Фур'є

Р.М. Таций, О.М. Трусевич

ПРЯМОЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ ОБЩЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ

Предложен и обоснован прямой метод решения первой общей краевой задачи для уравнения теплопроводности в прямоугольнике. В основе данного метода использован метод редукции, классический метод Фурье, метод собственных функций и собственных значений. Преимуществом данного метода является собственно прямой метод решения данной задачи. Решение получено в виде рядов. Задача решена с ненулевыми краевыми условиями на всех четырех сторонах прямоугольника и может быть распространена на случаи краевых условий второго и третьего рода или любых комбинаций таких условиях на разных сторонах прямоугольника.

Ключевые слова: собственные значения и собственные функции, метод Фурье, функция Коши, двойной ряд Фурье

R.M. Tatsij, O.M. Trusevych

DIRECT METHOD OF THE FIRST GENERAL BOUNDARY VALUE PROBLEM SOLUTION FOR HEAT EQUATION IN A RECTANGLE

The direct method for solving the first boundary value problem for the heat equation in the rectangle is proposed. The method is based on the reduction method, the classical Fourier method, method of eigenfunctions and eigenvalues. The advantage of this method is actually a direct method for solving this problem. The solution is obtained in series form. The problem is solved with nonzero boundary conditions on all four sides of the rectangle and can be used to the cases of boundary conditions of the second and third kind or any combination of such conditions on different sides of the rectangle.

Key words: eigenvalue and eigenfunctions, Fourier method, Cauchy function, double Fourier series

Вступ. При розв'язуванні нестаціонарних задач теорії теплопровідності у випадку, коли температура є функцією часу і двох просторових координат, виникають значні труднощі. В монографії [1] розглядаються деякі задачі двовимірного температурного поля, коли розв'язки можуть бути отримані методами інтегральних перетворень. Там, зокрема, розглядається двовимірна задача для прямокутника, на одній стороні якого підтримується температура, що змінюється в часі. Натомість на трьох інших сторонах підтримується нульова температура. Ця задача розв'язується шляхом застосування скінченного синус - перетворення Фур'є з наступним використанням формули оберненого перетворення.

Останнім часом все активніше при розв'язуванні задач нестаціонарної теплопровідності застосовується прямий метод, в основу якого покладено редукцію (зведення задачі до двох простіших, але взаємозв'язаних) з наступним застосуванням модифікованого методу Фур'є власних функцій [1] – [4]. У цій роботі ця ідея використана для розв'язування загальної задачі для прямокутника, коли крайові умови, що залежать від часу, задаються без обмежень на всіх чотирьох його сторонах.

Постановка задачі та її математична модель. У прямокутнику $\Pi:\{0 \le x \le h, 0 \le y \le d\}$ розглядається задача розв'язування рівняння:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) \tag{1}$$

при початковій умові:

$$T(x, y, 0) = f(x, y) \tag{2}$$

та крайовими умовами $T|_{\Gamma}$:

$$T|_{\Gamma}:\begin{cases} T(0, y, \tau) = \varphi_1(y, \tau), \quad T(x, 0, \tau) = \psi_1(x, \tau), \\ T(h, y, \tau) = \varphi_2(y, \tau), \quad T(x, d, \tau) = \psi_2(x, \tau) \end{cases} \tag{3}$$

та умовами узгодження в кутових точках прямокутника Π:

$$\begin{gathered} \varphi_1(0, \tau) = \psi_1(0, \tau), \varphi_1(d, \tau) = \psi_2(0, \tau), \\ \varphi_2(0, \tau) = \psi_1(h, \tau), \varphi_2(d, \tau) = \psi_2(h, \tau) \end{gathered} \tag{4}$$

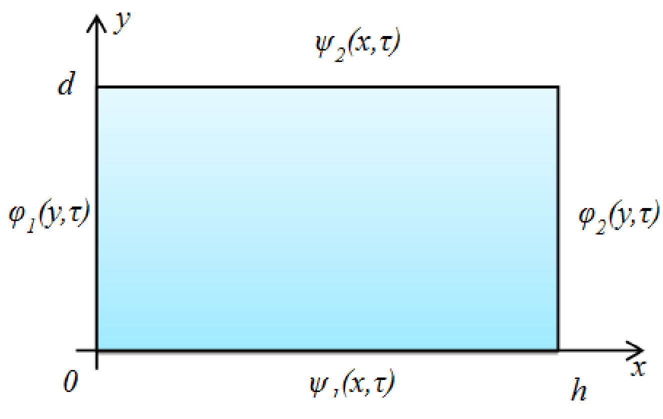

Рис. 1

Слідуючи методу редукції (див., наприклад, [5]), розв'язок задачі (1) - (4) шукаємо у вигляді суми двох функцій:

$$T(x, y, \tau) = U(x, y, \tau) + V(x, y, \tau) \ . \tag{5}$$

Одну із функцій із (5) виберемо довільно, тоді інша буде знайдена однозначно.

Вибір функції $U(x,y,\tau)$. Визначимо функцію $U(x,y,\tau)$ як розв'язок крайової (квазі-стаціонарної) задачі Діріхле:

$$\Delta U \equiv \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)=0, \tag{6}$$

$$U\big|_{\Gamma}=T\big|_{\Gamma},$$

тобто

$$\begin{aligned} &U(0,y,\tau)=\varphi_1(y,\tau), \quad U(x,0,\tau)=\psi_1(x,\tau),\\ &U(h,y,\tau)=\varphi_2(y,\tau), \quad U(x,d,\tau)=\psi_2(x,\tau). \end{aligned} \tag{7}$$

з умовами узгодженості (4). Розв'язок цієї задачі (див., наприклад, [6]) має вигляд:

$$\begin{aligned} U(x,y,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi n}{h}y}{\operatorname{sh}\frac{\pi n}{h}d}+B_n\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi n}{h}(d-y)}{\operatorname{sh}\frac{\pi n}{h}d}\right)\sin\frac{\pi n}{h}x+\\ +\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi n}{d}x}{\operatorname{sh}\frac{\pi n}{d}h}+D_n\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi n}{d}(h-x)}{\operatorname{sh}\frac{\pi n}{d}h}\right)\sin\frac{\pi n}{d}y+W(x,y,\tau), \end{aligned} \tag{8}$$

де коефіцієнти A_n, B_n, C_n, D_n обчислюються таким чином:

$$\begin{cases} A_n=\dfrac{2}{h}\displaystyle\int_0^h\psi_2(x,\tau)\sin\frac{\pi nx}{h}dx, \quad C_n=\dfrac{2}{d}\displaystyle\int_0^d\varphi_2(y,\tau)\sin\frac{\pi ny}{d}dy,\\ B_n=\dfrac{2}{h}\displaystyle\int_0^h\psi_1(x,\tau)\sin\frac{\pi nx}{h}dx, \quad D_n=\dfrac{2}{d}\displaystyle\int_0^d\varphi_1(y,\tau)\sin\frac{\pi ny}{d}dy, \end{cases}$$

а $W(x,y,\tau)=A(\tau)xy+B(\tau)x+C(\tau)y+D(\tau)$ – це гармонічна функція, яка забезпечує виконання умов узгодженості [6] в кутових точках прямокутника $\Pi:\{0\le x\le h, 0\le y\le d\}$. Функції $A(\tau),B(\tau),C(\tau),D(\tau)$ знаходимо із систем рівнянь:

$$W(0,0,\tau)=\begin{cases} D(\tau)=\varphi_1(0,\tau),\\ D(\tau)=\psi_1(0,\tau). \end{cases}$$

$$W(0,d,\tau)=\begin{cases} dC(\tau)+D(\tau)=\varphi_1(d,\tau),\\ dC(\tau)+D(\tau)=\psi_2(0,\tau). \end{cases}$$

$$W(h,0,\tau)=\begin{cases} hB(\tau)+D(\tau)=\psi_1(h,\tau),\\ hB(\tau)+D(\tau)=\varphi_2(0,\tau). \end{cases}$$

$$W(h,0,\tau)=\begin{cases} dhA(\tau)+hB(\tau)+dC(\tau)+D(\tau)=\varphi_2(d,\tau),\\ dhA(\tau)+hB(\tau)+dC(\tau)+D(\tau)=\psi_2(h,\tau). \end{cases}$$

Звідки одержуємо розв'язки цих систем рівнянь:

$$\begin{cases} D(\tau)=\dfrac{\varphi_1(0,\tau)+\psi_1(0,\tau)}{2}, \\ C(\tau)=\dfrac{\varphi_1(d,\tau)+\psi_2(0,\tau)-\varphi_1(0,\tau)-\psi_1(0,\tau)}{2d}, \\ B(\tau)=\dfrac{\psi_1(h,\tau)+\varphi_2(0,\tau)-\varphi_1(0,\tau)-\psi_1(0,\tau)}{2h}, \\ A(\tau)=\dfrac{\varphi_2(d,\tau)+\psi_2(h,\tau)-\psi_1(h,\tau)-\varphi_2(0,\tau)+\varphi_1(0,\tau)+\psi_1(0,\tau)-\varphi_1(d,\tau)-\psi_2(0,\tau)}{2hd}. \end{cases}$$

Мішана задача для функції $V(x,y,\tau)$**.** Оскільки функція $U(x,y,\tau)$ вже знайдена, то для визначення функції $V(x,y,\tau)$ підставимо (5) у рівняння (1), після чого одержимо рівняння:

$$\frac{\partial V}{\partial \tau}=a\Delta V-\frac{\partial U}{d\tau}. \tag{9}$$

Оскільки $U(x,y,\tau)$ вважаємо вже відомою, то (9) – неоднорідне рівняння теплопровідності. Встановимо крайові та початкові умови для функції $V(x,\text{y},\tau)$. Із співвідношення (5), враховуючи (7), маємо:

$$V\big|_{\Gamma}=0\ . \tag{10}$$

Для знаходження початкової умови, обчислимо (5) при $\tau=0$, врахувавши (2), остаточно одержуємо:

$$V(x,y,0)=f(x,y)-U(x,y,0)\overset{df}{=}\varphi(x,y). \tag{11}$$

Таким чином (9), (10), (11) – класична мішана задача для функції $V(x,y,\tau)$.

Шукаємо нетривіальні розв'язки однорідної крайової задачі:

$$\frac{\partial V}{\partial \tau}=a\Delta V \tag{12}$$

$$V\big|_{\Gamma}=0. \tag{13}$$

у вигляді [6]:

$$V(x,y,\tau)=e^{-\omega\tau}\cdot v(x,y), \tag{14}$$

що після підстановки в (12) дає:

$$-\omega\cdot v(x,y)=a\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

або

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\lambda\cdot v=0\quad \text{,де}\ \ \lambda=\frac{\omega}{a} \tag{15}$$

при нульових умовах

$$\begin{cases} v(0,y)=0, \quad v(x,0)=0, \\ v(h,y)=0, \quad v(x,d)=0. \end{cases} \tag{16}$$

Задача на власні значення (15), (16) розв'язана, наприклад, в [6]. Її власні значення:

$$\lambda_{mn}=\frac{\pi^2 m^2}{h^2}+\frac{\pi^2 n^2}{d^2}\ ,\ m,\, n\in \mathrm{N} \tag{17}$$

а відповідні власні функції (з точністю до сталого множника):

$$v_{mn} = \sin\frac{\pi m}{h}x \cdot \sin\frac{\pi n}{d}y\,. \tag{18}$$

Розв'яжемо мішану задачу (9) – (11) методом власних функцій. Для цього розвинемо відому функцію $\dfrac{\partial U}{\partial \tau}$ з (9) в подвійний ряд Фур'є за системою власних функцій $\{v_{mn}(x,y)\}$:

$$\frac{\partial U(x,y,\tau)}{\partial \tau} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{mn}\sin\frac{m\pi}{h}x\sin\frac{n\pi}{d}y\,.$$

Помноживши ліву та праву частини на множник $\sin\frac{\pi m}{h}x \cdot \sin\frac{\pi n}{d}y$ і проінтегрувавши по прямокутнику, маємо:

$$\int_0^h \sin^2\frac{m\pi}{h}xdx\int_0^d \sin^2\frac{n\pi}{d}ydy \cdot \alpha_{mn}(\tau) = \iint_{\Pi}\frac{\partial U(x,y,\tau)}{\partial \tau}\sin\frac{m\pi}{h}x\sin\frac{n\pi}{d}ydxdy\,.$$

$$\frac{h}{2}\cdot\frac{d}{2}\alpha_{mn}(\tau) = \iint_{\Pi}\frac{\partial U(x,y,\tau)}{\partial \tau}\sin\frac{m\pi}{h}x\sin\frac{n\pi}{d}ydxdy\,,$$

$$\alpha_{mn}(\tau) = \frac{4}{h\cdot d}\cdot\iint_{\Pi}\frac{\partial U(x,y,\tau)}{\partial \tau}\sin\frac{m\pi}{h}x\sin\frac{n\pi}{d}ydxdy\,. \tag{19}$$

Шукаємо функцію $V(x,y,\tau)$ у вигляді розвинення в ряд за власними функціями задачі на власні значення (15), (16):

$$V(x,y,\tau) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}t_{mn}(\tau)\cdot v_{mn}(x,y)\,, \tag{20}$$

де $t_{mn}(\tau)$ – невідомі функції по часу τ. Для їх знаходження підставимо (20) в диференціальне рівняння (9) для функції *V*:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}t'_{mn}(\tau)\cdot v_{mn}(x,y) = a\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}t_{mn}(\tau)\cdot\Delta v_{mn}(x,y) - \frac{\partial U}{\partial \tau}\,. \tag{19$'$}$$

Так як $v_{mn}(x,y)$ – власні функції задачі на власні значення (15), (16), то, враховуючи (15), маємо:

$$\Delta v_{mn} = -\lambda_{mn}v_{mn}\,. \tag{21}$$

Використавши (19$'$), (21), маємо:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}t'_{mn}(\tau)\cdot v_{mn}(x,y) = -a\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}t_{mn}(\tau)\cdot\lambda_{mn}v_{mn}(x,y) - \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{mn}(\tau)\cdot v_{mn}(x,y)\,, \tag{22}$$

що дає рівність:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(t'_{mn}(\tau) + at_{mn}(\tau)\lambda_{mn} + \alpha_{mn}(\tau))v_{mn} = 0\,.$$

Звідки отримуємо нескінченну сукупність диференціальних рівнянь першого порядку для визначення невідомих функцій $t_{mn}(\tau)$:

$$t'_{mn}(\tau) + at_{mn}(\tau)\lambda_{mn} + \alpha_{mn}(\tau) = 0 \text{ або}$$

$$t'_{mn}(\tau) + a\lambda_{mn}t_{mn}(\tau) = -\alpha_{mn}(\tau)\,. \tag{23}$$

Згідно з (20), при $\tau = 0$ та (11) маємо початкову умову для $t_{mn}(\tau)$:

$$t_{mn}(0) = \varphi_{mn}\,, \tag{24}$$

де φ_{mn} – коефіцієнти подвійного ряду Фур'є за системою власних функцій $\{v_{mn}(x,y)\}$ для функції (11), тобто

$$\varphi_{mn} = \frac{4}{dh}\iint_{\Pi} \varphi(x,y)\sin\frac{\pi m}{h}x\sin\frac{\pi n}{d}ydxdy\,.$$

Легко переконатися, що розв'язки сукупності задач Коші (23), (24) мають вигляд:

$$t_{mn}(\tau) = \varphi_{mn}e^{-a\pi(\frac{m^2}{h^2}+\frac{n^2}{d^2})\tau} - \int_0^{\tau} e^{-a\pi(\frac{m^2}{h^2}+\frac{n^2}{d^2})(\tau-s)}\alpha_{mn}(s)ds\,.$$

Висновки

Запропонована та обгрунтована формальна схема застосування прямого методу розв'язування першої загальної крайової задачі для рівняння теплопровідності в прямокутнику.

Задача розв'язана в найбільш загальній постановці з ненульовими крайовими умовами на всіх чотирьох сторонах прямокутника. Розв'язок отримано у вигляді рядів в явній формі.

Запропонована схема без ускладнень може бути поширена на випадки крайових умов другого та третього роду або будь-яких комбінацій таких умов на різних сторонах прямокутника.

Список літератури:

1. Лыков А. В. Теория теплопроводности. – Москва. – 1967. – 559 с.
2. Таций Р. М., Пазен О. Ю. Общие краевые задачи для уравнения теплопроводности с кусочно-непрерывными коэффициентами / Таций Р. М., Пазен О. Ю.// Инженерно-физический журнал Национальной Академии Беларусии. – 2016. – Том 89, № 2. – С. 350-361.
3. Тацій Р. М. Визначення теплообміну в нескінченній плиті з дискретно-неперервним розподілом тепла/ Тацій Р. М., Кусій М. І., Пазен О. Ю.// Пожежна безпека. Зб. наук. пр. 2012. – №20. – С. 20-26.
4. Тацій Р. М. Загальна перша крайова задача для рівняння теплопровідності з кусково-змінними коефцієнтами/ Тацій Р. М., Власій О. О., Стасюк М. Ф.// Вісник національного університету «Львівська політехніка» фіз.-мат. науки. – 2014. – №804. – С. 64-69.
5. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука,1977. – 735 с.
6. Положій Г. М. Рівняння математичної фізики. - Київ. – 1959. – 478 с.

References:

1. Likov, A.V.(1967), *Teoriya teploprovodnosty* [Theory of thermal conductivity] Nauka, Moscow, USSR.
2. Tatsii, R.M. and Pazen, O.U.(2016) «General boundary value problems for the heat equation with piecewise-continuous coefficients» *Journal of engineering physics of the National Academy of Belarus, vol.* 89, № 2. – pp.350-361.
3. Tatsii, R.M., Kusii, M.I. and Pazen O.U.(2016) «Determination of heat transfer in an infinite slab with discrete-continuous distribution of heat», *Journal «Fire safety»* vol.20., pp.20-26.
4. Tatsii, R.M., Vlasii, O.O. and Stasuk, M.F. «Total first boundary value problem for the heat equation with piecewise-variable coeffi cients», *Journal of National University «Lviv Polytechnic»Physics and mathematics* vol.804., pp. 64-69.
5. Tihonov, A.N. and Samarskii A.A.(1977) *Uravneniya matematicheskoi fizyky* [Mathematical physics equations] Nauka, Moscow, USSR.
6. Poloziy, G.M. (1959) *Rivnyannya matematichnoi fizyky* [Mathematical physics equations] Kiyv, Ukraine.

❖❖❖